DS 1-1 chapitre 1 suites (90mn)

Exercice 1 (*7 points*)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

1. calculer u_1 puis u_2

Solution:

En prenant $n = 0$ dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$, on a :
$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 4 = \frac{-2}{3} + 4 = \frac{10}{3}$
En prenant $n = 1$ dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$, on a :
$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 4 = \frac{10}{9} + 4 = \frac{46}{9}$

$\boxed{u_1 = \frac{10}{3} \text{ et } u_2 = \frac{46}{9}}$

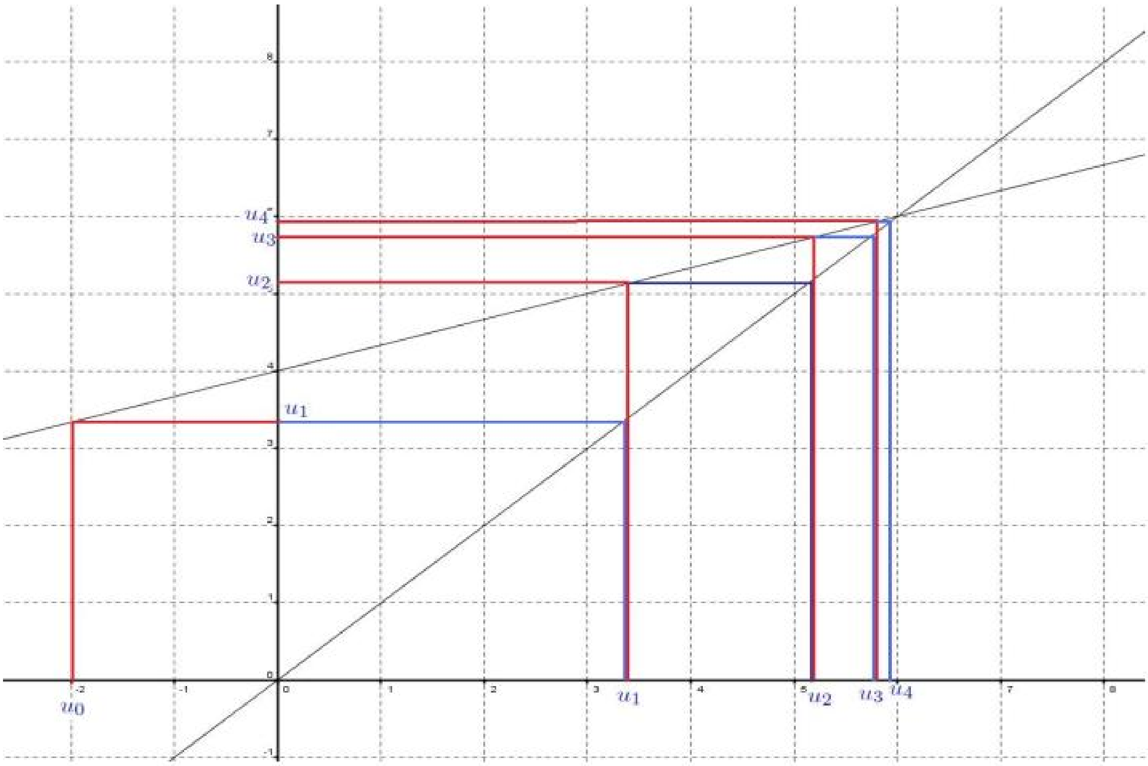
2. Tracer dans le même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x + 4$ puis représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suites (u_n)

Solution:

Pour obtenir u_1 avec le graphique, il suffit de placer u_0 sur le graphique et $\frac{1}{3}u_0 + 4 = u_1$

donc u_1 est l'image de u_0 par la fonction affine f dont la représentation graphique est la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 4$

De même, pour obtenir u_2, il suffit de placer u_1 sur l'axe des abscisses (avec la droite d'équation $y = x$) puis on obtient u_2 avec la droite équation $y = \frac{1}{3}x + 4$ soit $u_2 = f(u_1)$ et ainsi de suite....



Il semble que (u_n) soit croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 6$

Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\
&= \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 \text{ (car } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4) \\
&= \frac{1}{3}u_n - 2 \\
&= \frac{1}{3}(u_n - 6) \text{ (on factorise par le coefficient de } u_n \text{, ici } \frac{1}{3}) \\
&= \frac{1}{3}v_n
\end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -2 - 6 = -8$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n

☛ **Solution**:

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -8$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$

donc $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{-8}{3^n}$

$\boxed{v_n = \dfrac{-8}{3^n}}$

$v_n = u_n - 6$

donc $u_n = v_n + 6 = \dfrac{-8}{3^n} + 6$

$\boxed{u_n = \dfrac{-8}{3^n} + 6}$

5. Démontrer les variations de (u_n) conjecturées à la question 2.

☛ **Solution**:

$$u_n = \frac{-8}{3^n} + 6 \text{ et } u_{n+1} = \frac{-8}{3^{n+1}} + 6$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{-8}{3^{n+1}} + 6 - \left[\frac{-8}{3^n} + 6\right] \\
&= \frac{-8}{3^{n+1}} + 6 + \frac{8}{3^n} - 6 \\
&= \frac{-8}{3^{n+1}} + \frac{8}{3^n} \\
&= \frac{-8}{3^{n+1}} + \frac{3 \times 8}{3 \times 3^n} \\
&= \frac{-8+24}{3^{n+1}} \quad (\text{en effet } 3^n \times 3 = 3^n \times 3^1 = 3^{n+1}) \\
&= \frac{16}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

$3^{n+1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

6. Déterminer la limite de (u_n).

☛ **Solution**:

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -8$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

La raison appartient à l'intervalle $]-1;1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Et pour tout entier naturel n, on a $u_n = v_n + 6$

$\boxed{\text{donc par somme } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 2 (*6 points*)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a$, et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

www.MATHS-LYCEE.fr-mathématiques terminale S –Devoir n° 1-1 sur le chapitre 1 : Suites

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

☛ **Solution**:

Pour tout entier naturel n, on peut noter P_n la propriété $0 < u_n < 1$.

- Initialisation

$0 < u_0 < 1$ donc P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n < 1$ (propriété P_n).

$0 < u_n < 1$ donc $0 > -u_n > -1$ ⚠ l'inégalité change de sens en multipliant les 3 membres par -1

donc $1 > 1 - u_n > 0$

On a $1 > u_n > 0$

On peut donc multiplier membre à membre ces deux inégalités et donc $1 > u_n(1 - u_n) > 0$

donc P_{n+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{0 < u_n < 1 \text{ pour tout entier naturel } n.}$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante

☛ **Solution**:

Pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n - 1) = -u_n^2$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$

$\boxed{\text{et la suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

☛ **Solution**:

(u_n) est décroissante et minorée par 0 puisque $0 < u_n < 0$

$\boxed{\text{donc } (u_n) \text{ est convergente.}}$

Exercice 3 (*7 points*)

Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par , $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;20]$ par $f(x)=\dfrac{1}{10}x(20-x)$.

a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;20]$.

☛ **Solution**:

f est dérivable sur $[0;20]$ (produit de fonctions dérivables sur $[0;20]$)

$f(x)=\dfrac{1}{10}x(20-x)=2x-\dfrac{x^2}{10}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2-\frac{2x}{10}\\ &= 2-\frac{x}{5}\\ &= \frac{10-x}{5} \end{aligned}$$

$x\in[0;20]$ donc $10-x>0 \iff 10>x$

et donc $f'(x)>0$ sur $[0;10]$.

$\boxed{\text{donc } f \text{ est croissante sur } [0;10] \text{ et décroissante sur } [10;20].}$

x	0		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

$f(10)=2\times 10-\dfrac{10^2}{10}=20-10=10$

$f(0)=2\times 0-\dfrac{0^2}{10}=0$ et $f(0)=2\times 20-\dfrac{20^2}{10}=0$

b) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x\in[0\ ;\ 20]$.

☛ **Solution**:

D'après le tableau de variation de f, le minimum de f sur $[0;20]$ est 0 et le maximum 10

$\boxed{\text{donc } 0\leq f(x)\leq 10}$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 10$.

☛ **Solution**:

On note P_n la propriété $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 10$.

- Initilisation

$u_0=1$ et $u_1=\dfrac{1}{10}u_0\left(20-u_0\right)=\dfrac{19}{10}$

donc $0\leq u_0\leq u_1\leq 10$ soit P_0 vraie.

-Hérédité

on suppose qu'il existe un entier n tel que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$

f est croissante sur $[0;10]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ (E) avec $f(0)=0$ et $f(10)=10$

Or $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n\left(20-u_n\right) = f(u_n)$

et $u_{n+2} = \dfrac{1}{10}u_{n+1}\left(20-u_{n+1}\right) = f(u_{n+1})$

donc on a d'après (E) : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$ soit P_{n+1} vraie.

On a donc montré par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ naturel, on a } 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.}$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

☛ **Solution**:

Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

On a aussi $u_n \leq 10$ donc (u_n) est majorée par 10.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 10

$\boxed{\text{donc } (u_n) \text{ est convergente.}}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ donc si on note l la limite de la suite (u_n), on a $f(l) = l$

$$\begin{aligned}
f(l) = l &\iff \frac{1}{10}l(20-l) = l \\
&\iff l(20-l) = 10l \\
&\iff 20l - l^2 = 10l \\
&\iff 10l - l^2 = 0 \\
&\iff l(10-l) = 0 \\
&\iff 1 = 0 \text{ ou } 10 - l = 0 \\
&\iff 1 = 0 \text{ ou } l = 10
\end{aligned}$$

(u_n) est croissante et $u_0 = 1$ donc $l = 10$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 10}$$