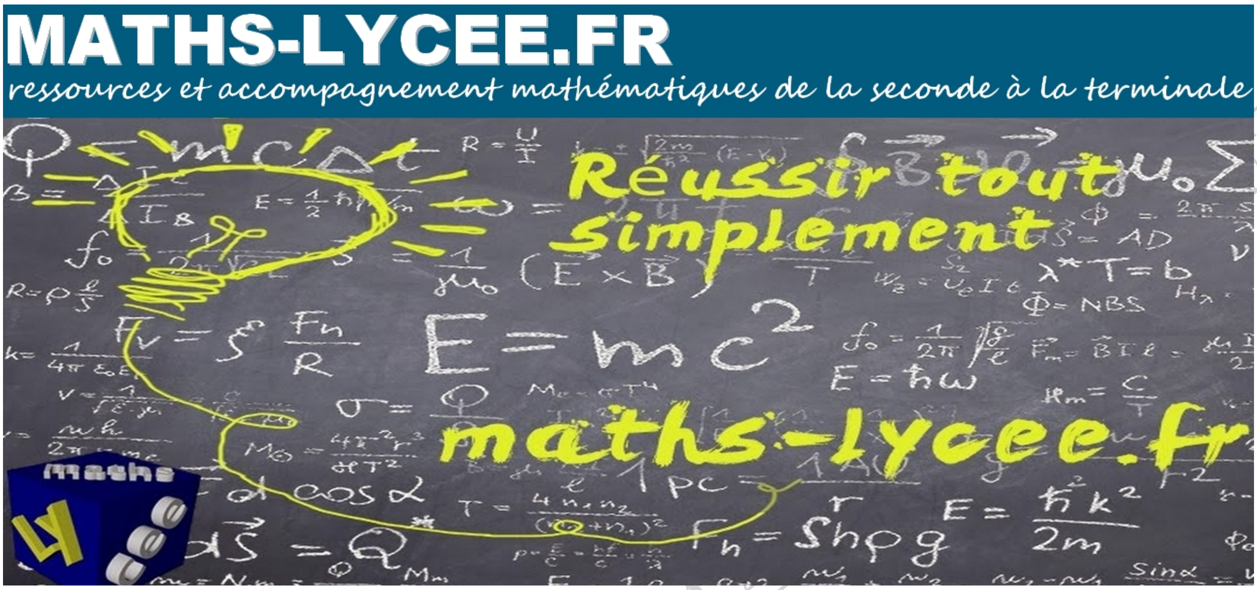
Chapitre 1 : somme des termes d'une suite en utilisant le raisonnement par récurrence



EXERCICE 1-2-7	★★	temps estimé:10-12mn

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

On note $S_n = \Sigma_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 .... + u_n$

1. Calculer u_0 et u_1.

☛ **Solution**:

En prenant $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{-1}{2^0} = -1$

En prenant $n = 1$, on a $u_1 = \dfrac{2 \times 1 - 1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{u_0 = -1 \text{ et } u_1 = \dfrac{1}{2}}$

2. Montrer pour tout entier naturel n, on a $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$

☛ **Solution**:

On note P_n la propriété $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$

-Initialisation

On a $u_0 = -1$ et $S_0 = 2 - \dfrac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - 3 = -1$ (rappel $2^0 = 1$)

- On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$ (P_n vraie)

et on veut montrer que l'on a alors $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$ (P_{n+1} vraie)

c'est à dire $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1}$$
$$= S_n + u_{n+1}$$
$$= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u_{n+1}$$

$u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \dfrac{2n+2-1}{2^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$

On a donc :

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{2(2n+3)}{2 \times 2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 + \frac{2n+1-(4n+6)}{2^{n+1}}$$

signe $-$ devant la barre de fraction avec $4n+6$

$$= 2 + \frac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}}$$
$$= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$ soit P_{n+1} vraie

On a donc montré par récurrence que $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

MATHS-LYCEE.FR terminale S- objectif BAC –Chapitre 1 : suites