Chapitre 8 : fonction exponentielle d'après BAC ES 2001

EXERCICE 8-2-5 | ★★ | temps estimé:30-40mn

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x+3+e^{(-x+2)}$

On notera $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentation de f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

☛ **Solution**:

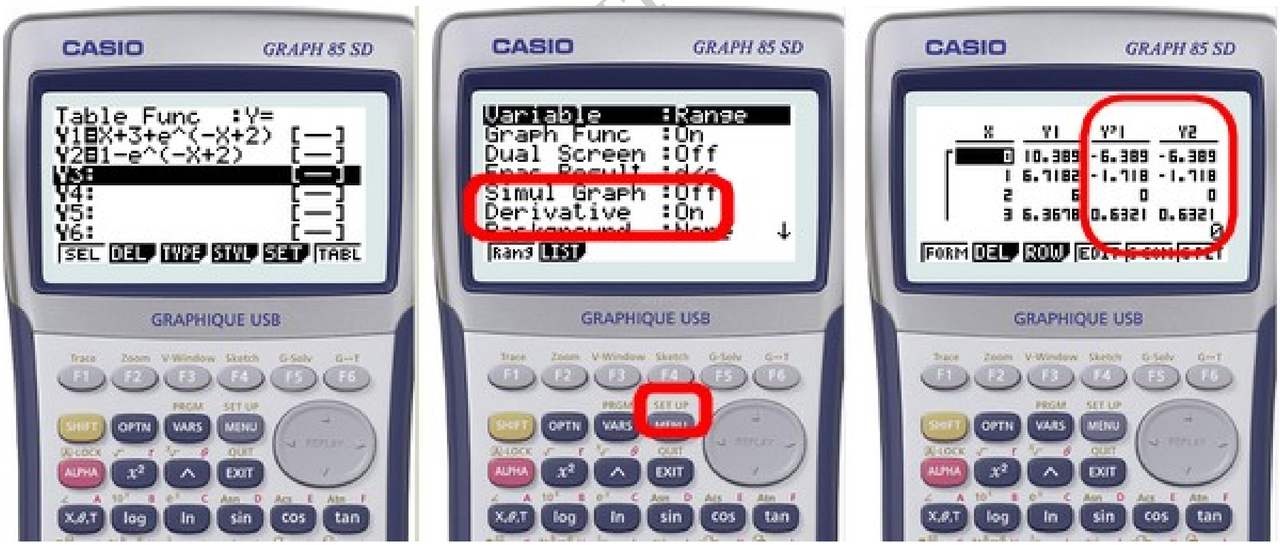
Avec $u(x)=-x+2$ on a u dérivable sur $[0;+\infty[$ et donc e^u est dérivable sur $[0;+\infty[$

donc f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$)

$$f'(x)=(x+3)'+u'(x)e^{u(x)}$$
$$=1+(-1)e^{(-x+2)}$$
$$=1-e^{(-x+2)}$$

Remarque

Penser à contrôler le calcul de $f'(x)$ avec le MENU TABLE de la calculatrice en saisissant Y1=$f(x)$ et Y2=$f'(x)$ et en activant l'option DERIVATIVE (CASIO)



Voir aussi fiche méthode chapitre 3 : contrôler une dérivée avec la calculatrice

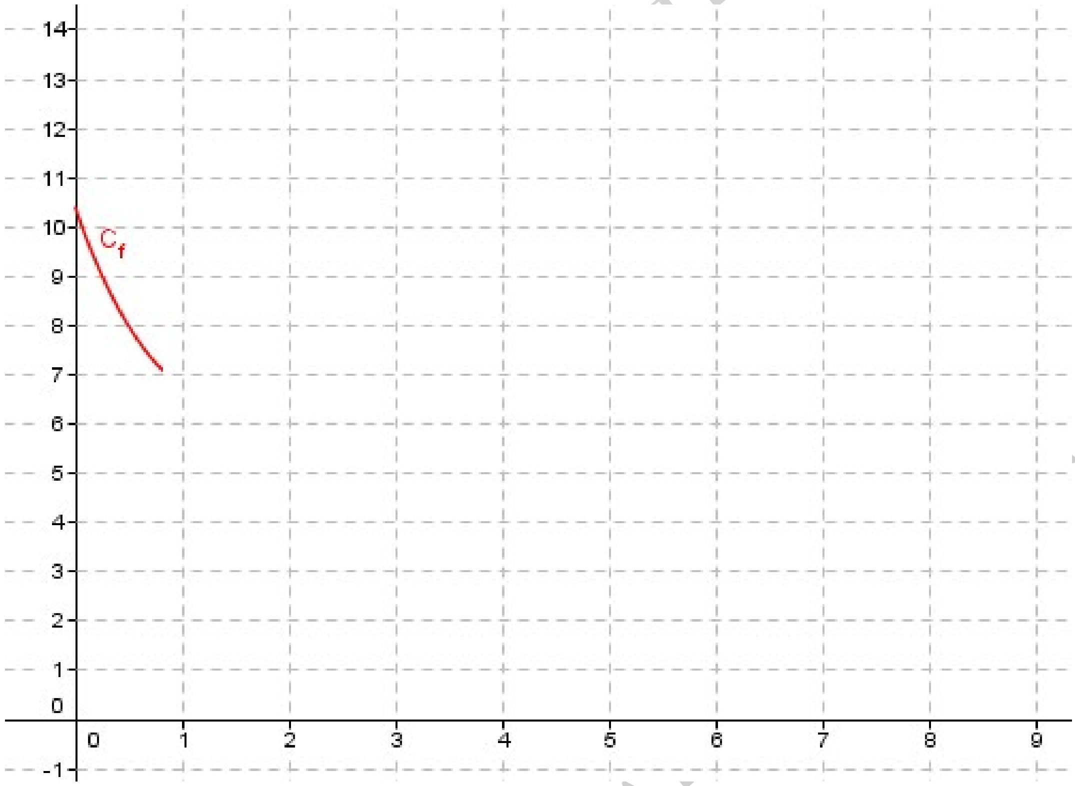
Signe de $f'(x)$

$$\begin{aligned} 1 - e^{(-x+2)} > 0 &\iff 1 > e^{(-x+2)} \\ &\iff e^0 > e^{(-x+2)} \\ &\iff 0 > -x+2 \\ &\iff x > 2 \end{aligned}$$

donc $f'(x) > 0$ pour $x > 2$ et donc f est croissante sur $]2;+\infty[$.

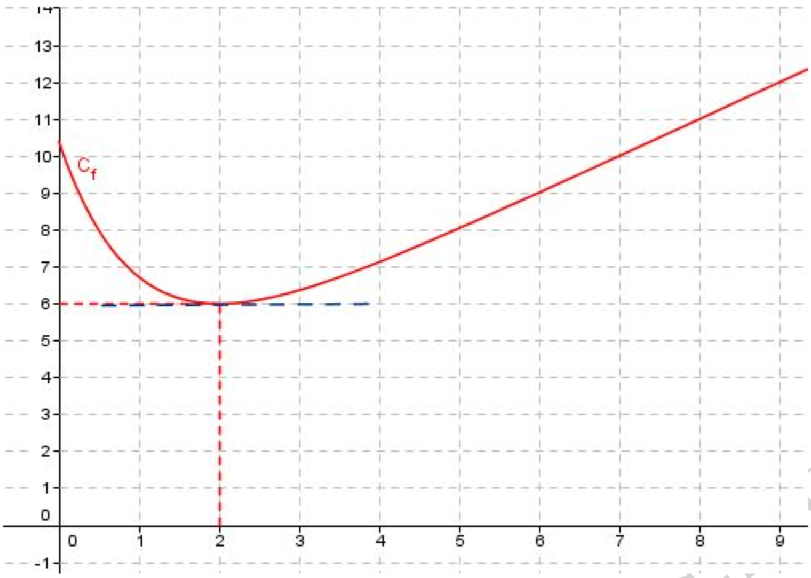
$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0;2[\text{ et croissante sur }]2;+\infty[.}$

2. Compléter le tracé de $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous.



☛ **Solution**:

Le minimum de f est $f(2) = 2 + 3 + e^{(-2+2)} = 5 + e^0 = 6$ car $e^0 = 1$.



3. En utilisant le graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation E : $f(x) = 8$.

Donner une valeur approchée de ces solutions avec la précision permise par le graphique.

☛ **Solution**:

Graphiquement, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 8$

donc l'équation $f(x) = 8$ admet deux solutions $x_1 \approx 0,5$ et $x_2 \approx 4,9$.

4. Justifier que sur l'intervalle $[2;6]$, l'équation E admet une solution unique α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

☛ **Solution**:

f est continue sur $[2;6]$ (somme de fonctions continues sur $[2;6]$).

$f(2) = 6$ et $f(6) = 6 + 3e^{(-6+2)} \approx 9,02$

f est continue et strictement croissante sur $[2;6]$ et 8 est compris entre $f(2)$ et $f(6)$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α.

En utilisant le MENU TABLE de la calculatrice, on obtient $f(4,94) \approx 7,99$ et $f(4,95) \approx 8,002$

donc $4,94 < \alpha < 4,95$.

$\boxed{f(x) = 8 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [2;6] \text{ avec } 4,94 < \alpha < 4,95.}$

5. On appelle M la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;9]$.

Calculer M, en donner une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise industrielle produit chaque jour x centaines d'objets $(1 < x < 20)$.

Le coût de fabrication de x centaines d'objets est donné par $f(x)$ exprimé en milliers d'euros.

1. Calculer le coût de fabrication de 600 objets puis 1200 objets, arrondi à l'euro.

2. Quelle quantité d'objets doit-on fabriquer pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 8000 euros ?

3. Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité q_0 d'objets.

Donner la valeur de q_0.

Quel est alors le coût, en euros, de fabrication d'un objet ?